



TITLE:

## 2状態信頼性システムの構造とエントロピーとの関係について(数理計画モデルにおける最適化理論)

AUTHOR(S):

大鋳, 忠男

---

CITATION:

大鋳, 忠男. 2状態信頼性システムの構造とエントロピーとの関係について(数理計画モデルにおける最適化理論). 数理解析研究所講究録 1992, 798: 49-53

ISSUE DATE:

1992-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82807>

RIGHT:

## 2 状態信頼性システムの構造とエントロピーとの関係について

愛知工業大学 大鑄 史男

平成 3 年 1 1 月 1 1 日

### 1 序

本稿では 2 状態信頼性システムの構造とエントロピーとの関係について述べる. 主な結果は次の通りである.

エントロピーを最小にするシステムの構造は並列システムか, もしくは直列システムのいずれかである. 又, 寿命分布関数を考えた時は, エントロピーを最小にする構造は  $k$ -out-of- $n$  システムであり, 指数寿命分布関数の時は直列システムが最小エントロピーを与える.

### 2 寿命分布関数を考えない場合

定義 1.  $n$  次の 2 状態システムとは次の条件を満たす組  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \varphi, S)$  である.

(1)  $S, \Omega_i (i = 1, \dots, n)$  はそれぞれ 2 つの要素からなる全順序集合である.

(2)  $\varphi$  は直積順序集合  $\prod_{i=1}^n \Omega_i$  から  $S$  への単調増加な全射である. <定義終わり>

$S = \Omega_i = \{0, 1\} (i = 1, \dots, n)$  と書く.  $0 < 1$  である.  $x \in \prod_{i=1}^n \Omega_i, C_1(x) = \{i \mid (x)_i = 1\}$  とする. 一般に集合  $A$  の濃度を  $\#A$  と書く. 又, 次の記号を用いる.

$$a_k = \{x \mid \varphi(x) = 1, \#C_1(x) = k\}, A_k = \#a_k$$

命題 2.

$$\frac{A_k}{\binom{n}{k}} \leq \frac{A_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}, k = 1, 2, \dots, n-1$$

である.

証明:  $\varphi$  の単調性から

$$\begin{aligned} & \cup_{x \in a_k} \{x\} \times \{y \mid \varphi(y) = 1, y \geq x, \#C_1(y) = k+1\} \\ & \subseteq \cup_{y \in a_{k+1}} \{x \mid x \leq y, \#C_1(x) = k\} \times \{y\} \end{aligned}$$

故, 濃度に関する簡単な計算から

$$(\#a_k) \times (n-k) \leq (k+1) \times (\#a_{k+1})$$

これで証明は終わる. <証明終わり>

定義 3. システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  の信頼度関数  $h_\varphi$  とは, 次のように定義される  $\{(p_1, \dots, p_n) \mid 0 \leq p_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$  から  $[0, 1]$  への写像である.

$(p_1, \dots, p_n)$  に対して, 各  $\Omega_i$  上の確率  $P_i$  で  $P_i(\{1\}) = p_i$ ,  $P_i(\{0\}) = 1 - p_i$  なるものが定まる.  $\otimes_{i=1}^n P_i$  を  $\prod_{i=1}^n \Omega_i$  上の  $P_i (i = 1, \dots, n)$  の直積確率とし,

$$h_\varphi(p_1, \dots, p_n) = (\otimes_{i=1}^n P_i)(\varphi^{-1}(\{1\}))$$

と定める. <定義終わり>

$h_\varphi$  の定義域を  $\{(p, \dots, p) \mid 0 \leq p \leq 1\}$  上に制限したとき,  $h_\varphi(p, \dots, p)$  を簡単に  $h_\varphi(p)$  と書く.

定理4. システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  に於いて,

$$h_\varphi(p) = \sum_{j=1}^n A_j p^j (1-p)^{n-j} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$$\alpha_j = (A_j / \binom{n}{j}) - (A_{j-1} / \binom{n}{j-1})$$

である.

証明:  $(p, \dots, p)$  から定まる  $\prod_{i=1}^n \Omega_i$  上の確率を  $P$  と書く.

$$\varphi^{-1}(1) = \cup_{j=1}^n a_j, \quad a_i \cap a_j = \phi \quad (i \neq j)$$

であるから

$$h_\varphi(p) = P(\varphi^{-1}(\{1\})) = \sum_{j=1}^n P(a_j) = \sum_{j=1}^n A_j p^j (1-p)^{n-j}.$$

定理中2番目の等号は明らかである. <証明終わり>

システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  が  $j$ -out-of- $n$  システムであるとは

$$A_k = \begin{cases} \binom{n}{k}, & \text{for } k \geq j \\ 0, & \text{for } k < j \end{cases}$$

である時で, その信頼度関数を  $h_{j,n}$  と書けば

$$h_{j,n}(p) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

である.

定理4を書き換えれば次の通りである.

系5. システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  に於いて

$$h_\varphi(p) = \sum_{j=1}^n \alpha_j h_{j,n}(p)$$

である.  $0 \leq \alpha_j \leq 1$  ( $1 \leq j \leq n$ ),  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$  に注意すれば,  $h_\varphi(p)$  が  $h_{j,n}(p)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) の凸結合で表せる事がわかる.

定義6. システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  の  $(p, \dots, p)$  に於けるエントロピー  $H_\varphi(p)$  とは

$$H_\varphi(p) = -h_\varphi(p) \log h_\varphi(p) - \bar{h}_\varphi(p) \log \bar{h}_\varphi(p)$$

である. ここで,  $\bar{h}_\varphi(p) = 1 - h_\varphi(p)$  である.  $j$ -out-of- $n$  システムのエントロピーを  $H_{j,n}(p)$  と書く. <定義終わり>

一般に  $-x \log x$  は  $[0, \infty)$  上で上に凸である。従って次の命題は容易である。

**命題7.** システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  に対して

$$H_\varphi(p) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_j H_{j,n}(p) \geq \min_{1 \leq j \leq n} H_{j,n}(p)$$

**証明:**

$$h_\varphi(p) = \sum_{j=1}^n \alpha_j h_{j,n}(p), \quad \bar{h}_\varphi(p) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{h}_{j,n}(p)$$

であるから  $-x \log x$  の凸性から命題は明かである。＜証明終わり＞

**命題8.** (1)  $p \geq 1/2 \Rightarrow 1 \leq \forall j \leq n, H_{j,n}(p) \geq H_{1,n}(p)$

(2)  $p < 1/2 \Rightarrow 1 \leq \forall j \leq n, H_{j,n}(p) \geq H_{n,n}(p)$

この命題の証明には次の2つの補題を用いるが、まず次の事に注意する。

$$0 \leq p \leq 1, 1 \leq \forall j \leq n, H_{j,n}(p) = H_{n-j+1,n}(1-p). \quad (8.1)$$

$f(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$  と置けば  $f(x) \uparrow_{x \in [0, 1/2]}$ ,  $f(x) \downarrow_{x \in [1/2, 1]}$  である。

**補題9.** (1)  $p \geq 1/2, 1 \leq j \leq [(n+1)/2] \Rightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{1,n}(p)$ .

(2)  $p \leq 1/2, n \geq j > [n/2] \Rightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{n,n}(p)$ .

**証明:** (1)  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=[(n+1)/2]}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq 1/2$   
故  $f(x)$  の性質から  $H_{j,n}(p) \geq H_{1,n}(p)$  である。

(2)  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq 1/2$

故  $f(x)$  の性質から  $H_{j,n}(p) \geq H_{n,n}(p)$  である。＜証明終わり＞

**補題10.**  $p \geq 1/2$  とする。この時  $p \geq 1-p$  であるから

$$h_{j,n}(p) \geq h_{j,n}(1-p), \quad \bar{h}_{j,n}(p) \leq \bar{h}_{j,n}(1-p)$$

であるが、次の事が成立する。

(1)  $1/2 \geq h_{j,n}(p) (\Leftrightarrow 1/2 \leq \bar{h}_{j,n}(p)) \Rightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$ .

(2)  $h_{j,n}(1-p) \geq 1/2 (\Leftrightarrow \bar{h}_{j,n}(p) \leq 1/2) \Rightarrow H_{j,n}(1-p) \geq H_{j,n}(p)$ .

(3)  $h_{j,n}(p) \geq \bar{h}_{j,n}(1-p) \geq 1/2 (\Rightarrow h_{j,n}(p) \geq 1/2 \geq h_{j,n}(1-p), \bar{h}_{j,n}(p) \leq 1/2 \leq \bar{h}_{j,n}(1-p))$   
 $\Rightarrow H_{j,n}(1-p) \geq H_{j,n}(p)$ .

(4)  $\bar{h}_{j,n}(1-p) \geq h_{j,n}(p) \geq 1/2 (\Rightarrow h_{j,n}(p) \geq 1/2 \geq h_{j,n}(1-p), \bar{h}_{j,n}(p) \leq 1/2 \leq \bar{h}_{j,n}(1-p))$   
 $\Rightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$ .

**証明:**

$$h_{j,n}(p) + \bar{h}_{j,n}(p) = 1, \quad h_{j,n}(1-p) + \bar{h}_{j,n}(1-p) = 1$$

及び  $f(x)$  の形から (1) - (4) は明かである。＜証明終わり＞

**命題8の証明:** (1)  $1 \leq j \leq [(n+1)/2]$  の時は補題9 (1) から明かである。  $n \geq j \geq [(n+1)/2]$  の時を考えると;

(1-i) 補題10 (1) によって

$$1/2 \geq h_{j,n}(p) \Rightarrow H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$$

(1-ii)  $h_{j,n}(p) \geq 1/2$  ならば、今  $j > (n+1)/2$  であるから  $n-j+1 < (n+1)/2$  で、よって

$$1/2 \leq h_{j,n}(p) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq \sum_{k=n-j+1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} = \bar{h}_{j,n}(1-p).$$

よって、補題10(4)から

$$H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$$

である。(1-i) (1-ii) いずれの場合に於いても  $H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p)$  の不等号関係は成立する。

$p \geq 1/2$  であるから、 $1-p \leq 1/2$ ,  $j > [(n+1)/2] \geq [n/2]$  で、従って補題9(2)を用いて、

$$H_{j,n}(p) \geq H_{j,n}(1-p) \geq H_{n,n}(1-p) = H_{1,n}(p)$$

である。

(2)は(1)と(8.1)式を用いて

$$H_{j,n}(p) = H_{n-j+1,n}(1-p) \geq H_{1,n}(1-p) = H_{n,n}(p)$$

である。＜証明終わり＞

命題7, 8を用いて次の定理を得る。

**定理11.** 任意のシステム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  に対して

$$p \geq 1/2 \implies H_{\varphi}(p) \geq H_{1,n}(p),$$

$$p \leq 1/2 \implies H_{\varphi}(p) \geq H_{n,n}(p)$$

である。＜定理終わり＞

**注意.** 本稿での  $n$  次のシステム概念にはコヒーレント概念は含まれない。従って  $n$  次のシステム全体の集合は高々  $n$  個のユニットからなるシステム全体の集合と同じである。この事に注意すれば定理11が次の事を主張している事が解る。高々  $n$  個のユニットからなるシステム全体の集合に於いて

$p \geq 1/2$  の時  $n$  次並列システムが最小エントロピーを与える。

$p \leq 1/2$  の時  $n$  次直列システムが最小エントロピーを与える。

### 3 寿命分布関数を考える場合

システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  に於いて各部品の寿命分布関数を同一で  $F(t)$  とし、確率的に独立であるとする。 $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$  とする。この時システムの寿命分布関数は信頼度関数を用いて  $1 - h_{\varphi}(\bar{F}(t))$  である。以下  $F(t)$  は微分可能であるとする。従って  $1 - h_{\varphi}(\bar{F}(t))$  も微分可能である。

**定義12.** 1システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  の  $\overbrace{(F, \dots, F)}^{m \text{ times}}$  に於けるエントロピー  $H_{\varphi}(F)$  とは

$$H_{\varphi}(F) = \int_0^{\infty} \left( \frac{d}{dt} h_{\varphi}(\bar{F}(t)) \right) \log \left( \frac{d}{dt} h_{\varphi}(\bar{F}(t)) \right) dt$$

である。＜定義終わり＞

系5から

$$h_{\varphi}(\bar{F}(t)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j h_{j,n}(\bar{F}(t))$$

であるから

$$\frac{d}{dt} h_{\varphi}(\bar{F}(t)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \frac{d}{dt} h_{j,n}(\bar{F}(t)) \right)$$

で,  $-x \log x$  が  $[0, \infty)$  上で上に凸である事から次の定理を得る.

**定理 1 3.** システム  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, S, \varphi)$  に対して

$$H_{\varphi}(F) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_j H_{j,n}(F) \geq \min_{1 \leq j \leq n} H_{j,n}(F)$$

<定理終わり>

各部品が独立で同一の指数分布関数に従う時, エントロピーを最小にするシステムの構造関数は, 簡単な計算から直列システムである事がわかる.

## 参考文献

- [1] R.E.Barlow and F.Prochan. *STATISTICAL THEORY of RELIABILITY and LIFE TESTING*, Holt, Rinhart and Winston, Inc., 1975.